

Capitolo Terzo

CALCOLO COMBINATORIO

§ 1. INTRODUZIONE, INSIEME PRODOTTO

Il *Calcolo Combinatorio* è quel Capitolo della Matematica che si occupa del computo degli elementi di un insieme finito ottenuto a partire da altri insiemi di cui si conosce già il numero degli elementi.

I problemi di cui ci occupiamo possono essere espressi nelle forme più varie e riferirsi agli argomenti più disparati, come appare dai seguenti

ESEMPL. 1) Quanti sono i triangoli che compaiono nella *Figura 1*?

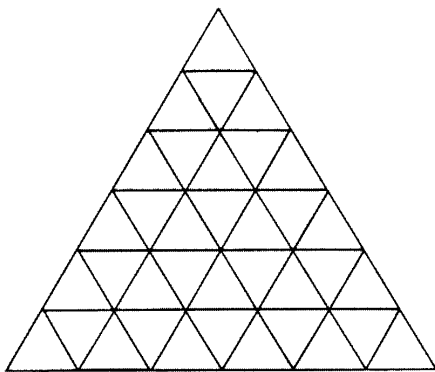


Figura 1

2) Si disputa una partita a "battaglia navale" con uno schema di 10 righe (indicate da lettere dell'alfabeto) e 12 colonne (indicate da numeri naturali). Quante sono le possibili chiamate?

3) Quattordici Studenti devono sostenere un esame orale e segnano il loro nome su un foglio per stabilire l'ordine delle interrogazioni. In quanti modi può essere compilata una tale lista?

4) Stessa situazione dell'Esempio precedente. Si supponga ora che la Commissione Esaminatrice decida di interrogare i Candidati in due giorni diversi, a gruppi di 7. In quanti modi può essere compilata la

lista degli Studenti da interrogare il primo giorno?

5) Quante sono le possibili cinquine in un'estrazione del lotto su una ruota?

6) Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

7) Quanti sono i numeri di 10 cifre in cui compare tre volte la cifra 1, cinque volte la cifra 2, due volte la cifra 3?

8) Quante sono le possibili colonne della schedina del totocalcio?

9) In quanti modi si possono collocare 20 biglie, fra loro uguali, in 5 scatole numerate?

Un problema, per essere risolubile, deve essere formulato in maniera chiara e inequivocabile. Solo dopo che sono stati stabiliti con chiarezza i termini del quesito, si può pensare alla sua risoluzione.

Non si possono dare dei *metodi generali* per la risoluzione dei vari problemi. In linea di principio, si potrebbe immaginare di *contare uno alla volta* tutti gli elementi dell'insieme, ma questo procedimento è, di regola, sconsigliabile se non, addirittura, impraticabile.

A volte, però, questa è l'unica via possibile.

ESEMPIO. 10) La Figura 2 rappresenta la pianta del labirinto del giardino in *Hampton Court*. Un uomo parte da *A* e vuole arrivare in *M*. Ogni volta che si trova ad un bivio, egli prende una delle strade possibili e la segue finché non scopre che questa è chiusa oppure si vede costretto a percorrere un sentiero già utilizzato; in tal caso, ritorna indietro fino a un bivio che gli permetta di seguire un nuovo cammino. Dopo quanti tentativi, al più, il nostro esploratore raggiungerà la meta?

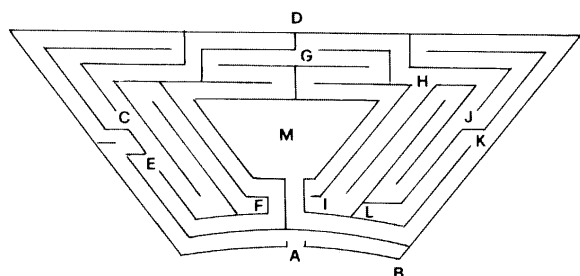


Figura 2

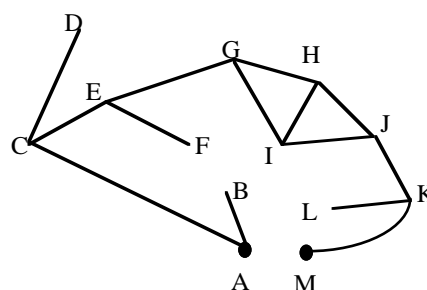


Figura 3

Si rappresentano i bivi con dei punti del piano e si congiungono con degli archi quelli che indicano incroci uniti da sentieri. Si costruisce così il grafo di Figura 3.

Non ci resta che annotare uno alla volta i percorsi possibili: *ABA*, *ACDC*, *CEFE*, *EGHIGI*, *IJHJ*, *JKLK*, *KM*. I tentativi sono perciò, al massimo, 7.

Vogliamo imparare qualche strategia più razionale e redditizia ma, proprio per questo, meno *universale*. A parte i casi più semplici e immediati, per arrivare al risultato è, quasi sempre, opportuno scindere il problema in altri più semplici e riconducibili ai "Problemi Tipo", che esporremo tra poco.

Esaminiamo intanto l'Esempio 1. La figura è divisa in triangolini elementari che assumiamo di lato 1; gli altri si ottengono riunendone un numero opportuno. Si ottengono così triangoli equilateri con il lato di lunghezza da 1 a 6; ci sono, inoltre, triangoli a "punta in su" e triangoli a "punta in giù". Per il conteggio, distinguiamo i vari tipi di triangolo:

Lato 1: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ a punta in su e $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ a punta in giù.

Lato 2: 15 a punta in su e 6 a punta in giù. Lato 3: 10 a punta in su e 1 a punta in giù.

Lato 4: 6; lato 5: 3; lato 6: 1, tutti a punta in su.

Si ha così un totale di $21 + 15 + 15 + 6 + 10 + 1 + 6 + 3 + 1 = 78$ triangoli.

In luogo di contare gli elementi di un sottoinsieme *A*, contenuto in un insieme *E* di *n* elementi, può essere talvolta più comodo contare gli elementi del complementare di *A* rispetto a *E* e poi sottrarre il numero così trovato da *n*.

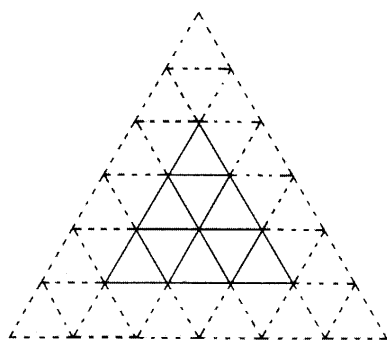


Figura 4

di pertinenza del Calcolo Combinatorio; il primo è di natura completamente diversa e può essere legato al modo di esprimersi o a questioni proprie di scienze diverse (matematiche e non).

ESEMPIO. 11) Si consideri ancora la Figura 1. Quanti sono i triangoli che hanno almeno un punto sul bordo esterno della figura?

Invece di contare i triangoli che ci vanno bene, contiamo quelli che non soddisfano alle condizioni richieste. Guardiamo la Figura 4 e procediamo come indicato in precedenza. Si vede subito che i triangoli non buoni sono 13. Quelli cercati sono, perciò, $78 - 13 = 65$.

Un problema di conteggio presenta, di regola, due ordini di difficoltà: *quali* sono gli elementi da contare e, poi, *quanti* sono. Solo il secondo punto è

ESEMPIO. 12) Fra i primi 100 000 numeri naturali positivi, quanti sono quelli che hanno la radice quadrata irrazionale?

Tenuto presente il *TEOREMA*: «Se la radice quadrata di un numero naturale non è un numero naturale, allora è un numero irrazionale», il quesito diventa semplicemente il seguente: "Fra i primi 100 000 numeri naturali positivi, quanti sono quelli che non sono quadrati perfetti?"

Avendosi $316^2 = 99\,856 < 100\,000 < 317^2 = 100\,489$, i numeri cercati sono dunque $100\,000 - 316 = 99\,684$.

Quando si devono contare gli elementi di un insieme, bisogna prestare molta attenzione a contarli "tutti" e "una sola volta ciascuno".

ESEMPIO. 13) Fra i primi 1000 numeri naturali positivi, quanti sono quelli che sono multipli di 3 o di 5?

Fra i primi 1000 numeri naturali positivi, i multipli di 3 sono 333, mentre i multipli di 5 sono 200. Sarebbe però errato se concludessimo che la risposta al nostro problema sia $333 + 200 = 533$. Infatti, così facendo, i multipli di 15 verrebbero contati due volte (prima fra i multipli di 3 e poi fra quelli di 5). Da 533 bisogna dunque togliere il numero dei multipli di 15. Poiché questi sono 66, il risultato esatto è $533 - 66 = 467$.

TEOREMA 1. Dati due insiemi A e B , rispettivamente di p e q elementi, se l'insieme $A \cap B$ è formato da r (≥ 0) elementi, allora l'insieme $A \cup B$ ne conta $p + q - r$.

DIM. Si contano gli elementi di A , poi di seguito quelli di B e si osserva che così facendo, se è $r > 0$, gli elementi di $A \cap B$ vengono contati due volte. ■

DEFINIZIONE. Il numero degli elementi di un insieme finito E viene indicato con $|E|$. Se è $|E| = n$, E è detto un n - insieme. L'insieme dei primi n naturali positivi sarà anche indicato con $E(n)$; dunque, per definizione, è $E(n) = \{1, 2, \dots, n\}$; porremo poi $E(0) = \emptyset$.

Il quesito dell'Esempio n. 2 è un caso particolare del seguente problema:

"Se due insiemi A e B hanno rispettivamente p e q elementi, quanti ne ha il loro insieme prodotto $A \times B$?"

TEOREMA 2. Se A e B sono due insiemi, rispettivamente di p e q elementi, il loro insieme prodotto $A \times B$ ne conta pq .

DIM. Procediamo per induzione su p . Per $p = 0$ e $p = 1$, la tesi è immediata. Supponiamola vera per $p - 1$ e proviamola per p . Fissato un elemento $a \in A$, contiamo dapprima le coppie che non contengono a e poi quelle che lo contengono. Per l'ipotesi induttiva, le coppie del primo tipo sono $(p - 1)q$, mentre le altre sono q . In tutto, le coppie sono dunque pq . ■

Nel nostro gioco di "battaglia navale", le possibili chiamate sono perciò 120. Facciamo un altro esempio.

ESEMPIO. 14) Sia E l'insieme dei numeri naturali compresi fra 10 e 80. Quanti sono gli elementi di E che hanno la prima cifra pari e la seconda dispari? Quanti quelli che hanno la prima cifra dispari e la seconda pari?

Per la prima domanda non ci sono problemi: la prima cifra può essere scelta in 3 modi e la seconda in 5. I numeri cercati sono dunque $3 \times 5 = 15$.

Veniamo alla seconda domanda. In questo caso è indispensabile sapere che cosa si debba intendere con la parola "compresi"; bisogna cioè decidere se includere anche gli estremi dell'intervallo oppure no, ossia se i numeri 10 e 80 appartengono o meno a E . La cosa è essenziale, dato che il numero 10 ha effettivamente la prima cifra dispari e la seconda pari. Perciò: se si accettano gli estremi, la risposta è $4 \times 5 = 20$; in caso contrario, è 19.

Il Teorema 2 ammette la seguente generalizzazione che si prova in modo del tutto analogo:

TEOREMA 3. Sia A un insieme di p elementi e, per ogni $a \in A$, sia poi B_a un insieme di q elementi. Allora l'insieme

$$E = \{(a, b): a \in A, b \in B_a\}$$

è formato da pq elementi. ■

ESEMPIO. 15) Sia E l'insieme dei primi 100 numeri naturali positivi. In quanti modi si possono scegliere 3 elementi di E se si vuole che due di essi, e non più di due, siano fra loro consecutivi?

Per scegliere due numeri consecutivi, basta assegnare il più piccolo dei due che, ovviamente, non può essere il 100: ci sono dunque 99 possibilità. Indichiamo questi due numeri con a e $a + 1$. Passiamo a scegliere il terzo numero che chiameremo c . Se è $a = 1$ o $a = 99$, c può essere scelto in 97 modi; per ciascuna delle altre 97 scelte possibili di a , ci sono solo 96 possibilità per c . Dunque (Teorema 3) i tre numeri cercati possono essere scelti in $2 \times 97 + 97 \times 96 = 9506$ modi diversi.

§ 2. PERMUTAZIONI SEMPLICI

Il quesito dell'Esempio n. 3 de § 1 è un caso particolare del seguente problema:
"In quanti modi si possono ordinare totalmente gli elementi di un n - insieme?"

DEFINIZIONE. Dato un n - insieme E , si dice sua *permutazione (semplice)* ciascuno dei possibili modi di ordinare totalmente i suoi elementi, cioè ogni n - pla ottenuta con essi in modo da usarli tutti, ossia ogni applicazione biettiva di $E(n)$ su E .

ESEMPIO. 1) Se è $E = \{a, b, c\}$, le possibili permutazioni sono 6 e cioè:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Il nostro problema può dunque essere così riformulato:

"Quante sono le permutazioni di un insieme E di n elementi?"

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n ; indichiamolo con P_n .

DEFINIZIONE. Dato un numero naturale positivo n , si chiama *fattoriale di n* o *n - fattoriale* il prodotto dei primi n numeri naturali positivi, accettando il valore 1 per $n = 1$. Il fattoriale del numero n si indica con il simbolo $n!$. Si definisce inoltre, per comodità, $0! = 1$.

$$\text{È dunque:} \quad n! := \begin{cases} 1, & \text{se è } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n, & \text{se è } n > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Si ha, ovviamente:} \quad (n + 1)! = (n + 1)n!.$$

Anzi, si vede subito che il fattoriale di un numero naturale può essere definito per ricorrenza dall'uguaglianza $(n + 1)! = (n + 1)n!$, con la condizione iniziale $0! = 1$.

TEOREMA 4. Le possibili permutazioni di un n - insieme sono $n!$.

DIM. Per $n = 0$ e $n = 1$, la tesi è ovvia. Supponiamola ora vera per $n - 1$ e proviamola per n . Scegliamo un elemento $a \in E$ da collocare al primo posto: n possibilità; gli altri $n - 1$ elementi possono essere ordinati, per l'ipotesi induttiva, in $(n - 1)!$ modi. Per il Teorema 3, si ha che i possibili ordinamenti di E sono $n(n - 1)! = n!$. ■

Come si è detto, il numero P_n , ossia il numero delle applicazioni biettive di $E(n)$ in un n - insieme E , non dipende dalla natura degli oggetti che compongono gli insiemi E ed $E(n)$, ma solo da n . Si conclude che il Teorema 4 è equivalente al

TEOREMA 5. *Le applicazioni biettive di un n - insieme A su un n - insieme B sono $n!$.* ■

Quanto all'Esempio dal quale siamo partiti, si ricava che le liste possibili sono in numero di $P_{14} = 14! = 87\,178\,291\,200$.

ESEMPIO. 2) Quanti sono i possibili anagrammi della parola *bacile* che non cominciano con *a*?

Dato che le lettere della parola in esame sono tutte distinte, i suoi anagrammi sono tanti quante le permutazioni di un insieme di 6 oggetti, ossia $6! = 720$. Da tale numero bisogna però togliere quello degli anagrammi che cominciano con *a*. Questi sono tanti quanti i possibili modi di ordinare, dopo *a*, le altre 5 lettere, ossia $5! = 120$. Il numero cercato è dunque $720 - 120 = 600$. Si può anche procedere in modo più diretto: la prima lettera può essere scelta in 5 modi; poi basta allineare le altre 5 lettere; si ottiene il numero $5 \times 5! = 600$. (Tutto ciò, naturalmente, se si prescinde dal fatto che le "parole" ottenute abbiano un qualche significato nella lingua italiana!)

Diamo qui di seguito, a titolo di esempio, i valori di $n!$ per i primi numeri naturali:

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
0; 1	1	6	720	11	39 916 800
2	2	7	5 040	12	479 001 600
3	6	8	40 320	13	6 227 020 800
4	24	9	362 880	14	87 178 291 200
5	120	10	3 628 800	15	1 307 674 368 000

Basta un rapido sguardo alla tabella per rendersi conto che i valori di $n!$ crescono molto rapidamente. In effetti, i valori della funzione $n!$ crescono più rapidamente non solo di quelli di qualunque potenza (n^2, n^3, \dots), ma addirittura di quelli delle funzioni esponenziali ($10^n, 100^n, \dots$), cfr. Cap. 5, § 6.

ESEMPLI. 3) In una lotteria collegata con una corsa ippica si devono abbinare sette biglietti, già estratti, ai sette cavalli in gara. Quanti sono i possibili abbinamenti?

La risposta non è $(7!)^2$, ma solo $7! = 5040$. Ci interessano solo gli abbinamenti e non l'ordine con cui questi vengono effettuati. Possiamo pensare i cavalli già ordinati (per es, secondo il numero di corsia); a questo punto, basta "mettere in fila" anche i biglietti.

4) Due squadre partecipano a un torneo di equitazione. La squadra *A* è formata da 6 concorrenti e la squadra *B* da 5. Quante sono le possibili classifiche individuali in cui si alternano elementi di una squadra con elementi dell'altra, se non ci sono "ex-aequo"? E se uno dei concorrenti della squadra *A* si è ritirato?

Nel primo caso, il primo concorrente deve appartenere alla squadra *A*, il secondo alla squadra *B*, il terzo alla *A*, e così via. A questo punto basta ordinare i concorrenti delle singole squadre ($6! \times 5! = 86\,400$ modi). Veniamo al secondo caso. Il testo è ambiguo. Se si conosce chi è il candidato che si è ritirato, la risposta è $2 \times (5!)^2 = 28\,800$. In caso contrario, il risultato va moltiplicato per 6; si ottiene così il numero $6 \times 2 \times (5!)^2 = 172\,800$.

44 - Capitolo Terzo

DEFINIZIONE. Dato un numero naturale positivo n , si chiama suo *semifattoriale* il prodotto dei numeri naturali positivi minori o uguali a n che hanno la sua stessa parità, accettando i valori 1, per $n = 1$, e 2, per $n = 2$. Tale numero si indica con $n!!$. Si assume inoltre, per comodità, $0!! = 1$.

È dunque:

$$n!! := \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ 2, & \text{se } n = 2 \\ 1 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times n, & \text{se } n \text{ è dispari e maggiore di } 1 \\ 2 \times 4 \times \dots \times (n-2) \times n, & \text{se } n \text{ è pari e maggiore di } 2 \end{cases}$$

Si ha ovviamente: $(n+2)!! = (n+2)n!!$.

Anzi, si vede subito che il semifattoriale di un numero naturale può essere definito per ricorrenza dall'uguaglianza $(n+2)!! = (n+2)n!!$, con le condizioni iniziali $0!! = 1!! = 1$.

Per $n > 0$, sussiste poi l'uguaglianza: $n! = n!!(n-1)!!$.

ESEMPIO. 5) Si ha:

$$\begin{aligned} 10!! &= 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840; & 9!! &= 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945; \\ 10!! \times 9!! &= 3840 \times 945 = 3\,628\,800 = 10!. \end{aligned}$$

§ 3. DISPOSIZIONI SEMPLICI

Il quesito dell'Esempio n. 4 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:

"Dato un insieme E di n elementi, quanti sono i suoi sottoinsiemi ordinati di k elementi, essendo k un numero naturale, con $0 \leq k \leq n$?"

DEFINIZIONE. Dato un insieme E di n elementi, ogni suo sottoinsieme *ordinato* di k elementi, con $0 \leq k \leq n$, prende il nome di *disposizione (semplice) di classe k degli elementi di E* ; al plurale, si parla di *disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k* . In altre parole, le disposizioni di n oggetti a k a k sono le applicazioni iniettive di $E(k)$ in un n -insieme E .

Il nostro quesito può dunque essere così riformulato:

"Quante sono le disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k ($0 \leq k \leq n$)?"

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k ; indichiamolo con $D_{n,k}$.

DEFINIZIONE. Per ogni numero reale x e per ogni numero naturale k , si definisce

$$(x)_k := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ x, & \text{se } k = 1 \\ x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1), & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Il numero $(x)_k$ prende il nome di *fattoriale discendente di x di ordine k* .

In particolare, per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si ha:

$$(n)_n = n!; \quad (n)_k = 0, \text{ se } k > n, \quad (n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ se } 0 \leq k \leq n.$$

TEOREMA 6. Le disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k sono in numero di

$$D_{n,k} = (n)_k.$$

DIM. Per $n = 0$ la tesi è ovvia, dato che c'è un unico modo di scegliere l'insieme vuoto (anche se *ordinato*). Sia dunque $k > 0$. Si ha immediatamente:

$$D_{n,1} = n; \quad D_{n,n} = n!.$$

Infatti, nel primo caso c'è solo da scegliere un elemento di E , mentre, nel secondo, abbiamo tutte le sue permutazioni. Sia dunque $1 < k < n$.

Supponiamo di avere una delle disposizioni cercate; facendo seguire agli elementi di questa gli $n - k$ che restano, arbitrariamente ordinati, si ottiene una permutazione di tutti gli elementi di E . Anzi, partendo da una disposizione di classe k , si possono ottenere, nel modo sopra detto, esattamente $(n - k)!$ permutazioni diverse di E . D'altra parte, ogni permutazione di E si può pensare ottenuta con tale legge da un'opportuna (e *unica*) disposizione di classe k . Si conclude così con l'uguaglianza

$$P_n = P_{n-k} D_{n,k},$$

ossia:
$$D_{n,k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = (n)_k. \blacksquare$$

Come si è già detto, il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni di n oggetti a k a k , ossia delle applicazioni iniettive di $E(k)$ in un n - insieme E , non dipende dalla natura degli oggetti che compongono gli insiemi E ed $E(k)$, ma solo da n e da k ; si conclude che il Teorema 6 è equivalente al seguente

TEOREMA 7. Le applicazioni iniettive di un k - insieme A in un n - insieme B (con $0 \leq k \leq n$) sono in numero di $(n)_k$. ■

Nel caso particolare dell'Esempio da cui siamo partiti, si ottiene che le possibili liste sono

$$D_{14,7} = (14)_7 = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 17\,297\,280.$$

ESEMPLI. 1) Quante sono le parole di 4 lettere distinte che si possono formare utilizzando le lettere del vocabolo "albergo"?

Anche in questo caso, come in altri analoghi, prescindiamo dal fatto che le parole di cui si parla abbiano un qualche significato. Ammesso ciò, il problema proposto è quello di sapere in quanti modi si possono disporre 7 oggetti a 4 a 4. La risposta è dunque $D_{7,4} = (7)_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

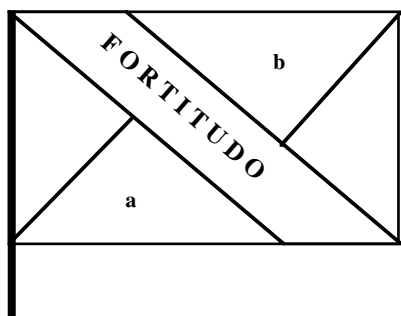


Figura 5

2) Un'associazione sportiva vuole adottare una bandiera come quella mostrata in Figura 5, utilizzando alcuni fra i colori seguenti: bianco, nero, rosso, giallo, verde, ocra, azzurro, violetto, arancione. Quante sono le possibili bandiere se si richiede: che la scritta centrale sia o rossa o nera e abbia comunque un colore diverso da quello della fascia che la contiene; che tutte le 5 regioni abbiano colori diversi? E se si chiede che le regioni a e b abbiano lo stesso colore?

La scritta si può fare in 2 modi; restano poi 8 possibilità per la fascia centrale. Per le altre 4 regioni c'è solo il vincolo di non riutilizzare il colore della fascia centrale, fermo restando che devono essere tutte di colore diverso. Si ha così il numero $2 \times 8 \times D_{8,4} = 2 \times 8 \times (8)_4 = 26\,880$. Nel secondo caso, le regioni a e b vengono come unificate: oltre alla striscia centrale, ci sono ora solo 3 regioni ($2 \times 8 \times D_{8,3} = 2 \times 8 \times (8)_3 = 5\,376$ possibilità).

3) Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte, da 000 000 a 999 999 (cioè se si conviene di scrivere, per esempio, 012 345 in luogo di 12 345)? Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte effettive (cioè numeri di 6 cifre che non cominciano con 0)?

Nel primo caso, la risposta è data da $D_{10,6} = (10)_6 = 151\,200$. Nel secondo, da $D_{10,6} - D_{9,5} = 9 \times D_{9,5} = 9 \times (9)_5$; bisogna, infatti, togliere i numeri che cominciano con 0, che sono tanti quanti i numeri di 5 cifre distinte e diverse da 0. Naturalmente, a questa seconda domanda si può dare una risposta più diretta: ci sono 9 modi per scegliere la prima cifra ($\neq 0$), poi ci sono $D_{9,5}$ modi per scegliere le cifre successive: in conclusione, i numeri cercati sono appunto $9 \times (9)_5 = 136\,080$.

§ 4. COMBINAZIONI SEMPLICI

Il quesito dell'Esempio n. 5 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:

"Dato un n - insieme E , quanti sono i suoi sottoinsiemi di k elementi, essendo k un numero naturale, con $0 \leq k \leq n$?"

DEFINIZIONE. Dato un insieme E di n elementi, ogni suo sottoinsieme di k elementi ($0 \leq k \leq n$) prende il nome di *combinazione (semplice) di classe k degli elementi di E* . Al plurale, si parla di *combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k* .

Possiamo perciò riformulare il nostro quesito così:

"Quante sono le combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k ?"

Il numero che stiamo cercando non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k ; indichiamolo con $C_{n,k}$. Come appare dalla definizione, la differenza tra *combinazioni* e *disposizioni* consiste nel fatto che gruppi di k oggetti di un insieme E , che differiscano solo per l'ordine con cui essi vengono considerati, danno luogo a diverse disposizioni, ma sono la medesima combinazione. Anzi, si vede subito che da ogni combinazione di classe k si ottengono esattamente $k!$ disposizioni diverse, cioè tante quanti sono i modi di ordinare totalmente i k oggetti in questione. Si ottiene dunque l'uguaglianza

$$D_{n,k} = C_{n,k} P_k,$$

dalla quale si ricava

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} \frac{1}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Si conclude così col

TEOREMA 8. *Le combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k ($0 \leq k \leq n$) sono in numero di*

$$C_{n,k} = \frac{(n)_k}{k!}. \blacksquare$$

In luogo del simbolo $C_{n,k}$, si usa più volentieri l'espressione $\binom{n}{k}$ che si legge *n su k* .

DEFINIZIONE. Quali che siano i numeri naturali n e k , con $k \leq n$, si definisce:

$$\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!}.$$

Dunque, se è $k > 0$ (da cui $n > 0$), si ha:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

e, in particolare,

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Essendo $0! = 1$, si ottiene $\binom{n}{0} = 1$ e, in particolare, $\binom{0}{0} = 1$, in accordo con l'uguaglianza $\binom{n}{0} = C_{n,0}$ e col fatto che c'è un unico modo di scegliere un sottoinsieme *vuoto* (anche partendo da un insieme privo di elementi).

DEFINIZIONE. I numeri rappresentati dai simboli $\binom{n}{k}$ prendono il nome di *coefficienti binomiali* (il perché verrà spiegato nel prossimo paragrafo).

Quanto al problema del lotto, si ha che le possibili cinquine, su una ruota, sono

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 43\,949\,268.$$

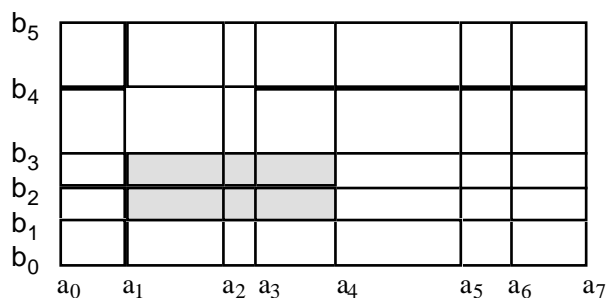


Figura 6

ESEMPI. 1) Quanti sono i rettangoli che compaiono nella *Figura 6*?

Ogni rettangolo è individuato dai suoi 4 lati, ossia da 2 rette *orizzontali* e da due rette *verticali*. Le prime sono in tutto 6, le altre 8. Per esempio, il rettangolo evidenziato in figura è individuato dalle rette orizzontali per b_1 e b_3 e da quelle verticali per a_1 e a_4 . Ci

sono $\binom{6}{2} = 15$ modi per scegliere le 2 rette

orizzontali e $\binom{8}{2} = 28$ modi di scegliere quelle verticali. In tutto, i rettangoli sono perciò $15 \times 28 = 420$.

2) Si consideri ancora la *Figura 6* e la si interpreti come una *pianta stradale*. In quanti modi si può andare da (a_0, b_0) a (a_7, b_5) senza allungare inutilmente la strada?

Ciascuno dei cammini cercati è composto da 7 tratti orizzontali e 5 verticali, per un totale di 12. C'è dunque solo da scegliere l'ordine con cui devono susseguirsi i tratti orizzontali e quelli verticali. Per ottenere una di queste scelte, basta decidere quali dei 12 tratti devono essere orizzontali e, dato che questi devono essere 7, ciò si può fare in $\binom{12}{7} = 792$ modi.

3) Dati 6 punti del piano, a 3 a 3 non allineati, quante rette si ottengono congiungendoli a 2 a 2? Quanti sono, al massimo, gli ulteriori punti di intersezione di queste rette?

Le rette sono, ovviamente $\binom{6}{2} = 15$. Intersecando a 2 a 2 le 15 rette, si possono ottenere fino a $\binom{15}{2} = 105$ punti; nel nostro caso, però, le rette passano a 5 a 5 per uno stesso punto in cui vengono così a cadere 10 intersezioni. Il numero cercato è dunque $105 - 10 \times 6 = 45$.

§ 5. LA FORMULA DI NEWTON

Il problema è quello di esprimere la *potenza n - ima del binomio*. Vogliamo cioè trovare lo sviluppo di

$$(a + b)^n, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Per definizione, si ha:

$$(a + b)^1 = a + b$$

e, per $n > 1$, $(a + b)^n = (a + b)(a + b) \dots (a + b)$, (n volte).

TEOREMA 9. (Formula di NEWTON per la potenza del binomio). *Quali che siano i numeri reali a e b , per ogni numero naturale positivo n , si ha:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

DIM. In virtù delle proprietà formali delle operazioni, il risultato cercato sarà dato dal polinomio

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n c_k a^k b^{n-k},$$

dove il coefficiente c_k è il numero naturale che esprime quante volte il monomio $a^k b^{n-k}$ compare nel nostro sviluppo. Per ottenere uno degli addendi, bisogna scegliere da ciascuno degli n fattori $(a + b)$ uno dei due termini e farne il prodotto. Se vogliamo che quest'ultimo sia proprio $a^k b^{n-k}$, dobbiamo ovviamente scegliere a esattamente da k fattori e, di conseguenza, b dai rimanenti $n - k$. Sappiamo che questa scelta può essere fatta in $\binom{n}{k}$ modi. Si conclude perciò che nella (*) è $c_k = \binom{n}{k}$. ■

Notiamo che, essendo $\binom{0}{0} = 1$, la formula sopra scritta assume, per $n = 0$, la forma $(a + b)^0 = 1$, che è conveniente accettare come vera, anche nell'eventualità che sia $a = 0 = b$, anche se, in questo caso, ci si imbatte nell'espressione 0^0 , alla quale non sempre è opportuno attribuire un significato.

È ora ben chiaro perché ai numeri $\binom{n}{k}$ si dà il nome di coefficienti binomiali.

ESEMPLI. 1) Si ha: $(2a - b)^5 = 32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$.

2) Quanti sono i monomi dello sviluppo di $(a + b)^n$? E se ognuno di essi viene contato tante volte quante ne indica il coefficiente c_k ?

Dato che in ogni fattore si deve scegliere o a o b , ci sono 2 possibilità per ciascuno degli n fattori e quindi i monomi dovrebbero essere 2^n (risposta alla seconda domanda). I monomi distinti sono però solo $n + 1$, dato che l'esponente di a può variare solo da 0 a n e che gli esponenti di a e di b devono avere per somma n .

3) Si sviluppi $(a + b + c)^4$ pensandolo scritto nella forma $((a + b) + c)^4$.

Si ha: $((a + b) + c)^4 = (a + b)^4 + 4(a + b)^3c + 6(a + b)^2c^2 + 4(a + b)c^3 + c^4 =$
 $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c +$
 $+ 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4. (15 \text{ addendi!})$

Stabiliremo alcune proprietà che intercorrono fra i coefficienti binomiali.

$$(a) \quad \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

Ossia: *Nello sviluppo della potenza del binomio, i coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali.*

$$\text{Si ha infatti} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}.$$

Ma tale uguaglianza può essere giustificata anche osservando che la legge che a ogni sottoinsieme di un n - insieme E associa il suo complementare stabilisce una corrispondenza biunivoca fra la totalità dei sottoinsiemi di E con k elementi e quella dei sottoinsiemi di E che ne hanno $n - k$.

$$(b) \text{ (Formula di Stifel)} \quad \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}.$$

Ossia: *Il coefficiente k - imo nello sviluppo della potenza n - ima del binomio è dato dalla somma dei coefficienti $(k-1)$ - imo e k - imo dello sviluppo della potenza precedente.*

Chiaramente, l'espressione ha senso per $0 < k < n$. Anche in questo caso si può giungere al risultato facendo i conti (esercizio per il Lettore), ma è più simpatico arrivarci con un semplice ragionamento. Fissiamo dunque un elemento a in un n - insieme E . Per contare i sottoinsiemi di E con k elementi, vediamo quanti di essi contengono l'elemento a e quanti non lo contengono. Per assegnare un sottoinsieme del primo tipo, bisogna aggiungere ad a altri $k-1$ oggetti scelti fra gli $n-1$ rimasti; ciò si può fare in $\binom{n-1}{k-1}$ modi. Invece, per assegnare un insieme del secondo tipo, bisogna scegliere k oggetti fra gli $n-1$ elementi di E che sono diversi da a ; ciò si può fare in $\binom{n-1}{k}$ modi.

Sviluppando $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$ con la Formula di Newton, si ottiene:

$$(c) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

$$(d) \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Dalla (d) si ricava subito che: *Nello sviluppo della potenza del binomio, la somma dei coefficienti di posto pari uguaglia quella dei coefficienti di posto dispari.*

Siamo ora in grado di risolvere il quesito dell'Esempio n. 6 del § 1.

TEOREMA 10. *I sottoinsiemi di un insieme E di n elementi sono in numero di 2^n .*

DIM. Basta contare i sottoinsiemi di E con k elementi, al variare di k da 0 a n , e poi sommare tenendo conto della (c). ■

Fra tutte le uguaglianze che legano i coefficienti binomiali, la più significativa è indubbiamente la *Formula di Stifel*. In effetti, i coefficienti binomiali possono essere definiti *per ricorrenza* mediante tale proprietà e le *condizioni iniziali* nel modo seguente:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Sfruttando la *Formula di Stifel*, si può costruire il ben noto *Triangolo Aritmetico* (detto anche di *Tartaglia* o di *Pascal*):

TRIANGOLO ARITMETICO								
$\binom{n}{k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
.....

Per ragioni di comodità, è opportuno attribuire un significato al simbolo $\binom{a}{k}$ anche nel caso che a sia un numero reale qualunque, però sempre con $k \in \mathbb{N}$. Precisamente:

DEFINIZIONE. Qualunque sia il numero reale a e qualunque sia il numero naturale k , si definisce:

$$\binom{a}{k} := \frac{(a)_k}{k!} = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 0 \\ a, & \text{per } k = 1 \\ \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!}, & \text{per } k > 1 \end{cases}.$$

In particolare, si vede immediatamente che $\binom{a}{k} = 0$ se e solo se a è un numero naturale minore di k . Osserviamo ancora che, anche nel caso più generale in cui a non è un numero naturale, continua a sussistere la Formula di Stifel, come si può appurare facilmente effettuando i calcoli (Esercizio!).

ESEMPLI. 4) Si ha $\binom{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!} = \frac{2\sqrt{2}-3}{3}.$

5) Si ha: $\binom{\pi}{4} = \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{4!} = \frac{(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{3!} \left[1 + \frac{\pi-4}{4} \right] =$
 $= \frac{(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{3!} + \frac{(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)(\pi-4)}{4!} = \binom{\pi-1}{3} + \binom{\pi-1}{4}.$

§ 6. PERMUTAZIONI E DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Il quesito dell'Esempio n. 7 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:

"In quanti modi si possono allineare n oggetti, di cui n_1 uguali ad un oggetto A_1 , n_2 uguali ad un oggetto A_2 ,, n_k uguali ad un oggetto A_k , con l'ovvia condizione che sia $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$; $n_i \geq 0$?"

DEFINIZIONE. A ciascuno di questi allineamenti si dà il nome di *permutazione fra elementi non tutti distinti* o *permutazione con ripetizione di tipo n_1, n_2, \dots, n_k* degli n oggetti.

TEOREMA 11. Le permutazioni con ripetizione di tipo n_1, n_2, \dots, n_k di n oggetti sono in numero di

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}}{n_k}$$

DIM. Immaginiamo, per un momento, che gli n oggetti siano tutti distinguibili fra loro. In tal caso, si possono allineare in $n!$ modi diversi. Ma, in realtà, due allineamenti che differiscono solo per lo scambio di elementi dello stesso tipo sono indistinguibili. Precisamente: nel numero $n!$ ogni allineamento viene contato tante volte quanti sono i modi di permutare gli elementi del tipo A_1 , o del tipo A_2 ,, o del tipo A_k : in conclusione, viene contata $n_1! n_2! \dots n_k!$ volte. Si ottiene che il numero cercato è

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Il problema può essere affrontato anche in un altro modo. Ogni allineamento consta di n posti, n_1 dei quali occupati dagli elementi di tipo A_1 , n_2 da quelli di tipo A_2 , e così via. Il problema è dunque quello di assegnare i rispettivi posti. Per gli oggetti di tipo A_1 , ciò può essere fatto in $\binom{n}{n_1}$ modi; dopo di che, quelli di tipo A_2 possono essere sistemati in $\binom{n - n_1}{n_2}$ modi, dato che n_1 degli n posti iniziali sono già occupati; e così via. Si ottiene in tal modo la seconda espressione. ■

Quanto all'esempio da cui siamo partiti, si ha che i numeri cercati sono in tutto $\frac{10!}{3! \times 5! \times 2!} = 2520$.

ESEMPIO. 1) In un ufficio ci sono dieci impiegati. Questi vanno in ferie in tre turni: 3 nel primo, 4 nel secondo e 3 nel terzo. Quante sono le possibili assegnazioni dei dieci impiegati ai tre turni?

Ci sono $\binom{10}{3}$ modi per scegliere gli impiegati per il primo turno di ferie; $\binom{7}{4}$ per scegliere, fra i rimanenti, quelli del secondo turno; i restanti sono ovviamente assegnati al terzo. Il risultato è dunque espresso dal numero

$$\binom{10}{3} \binom{7}{4} \binom{3}{3} = \frac{10!}{3! \times 4! \times 3!} = 4200.$$

Il quesito dell'Esempio n. 8 del § 1 è un caso particolare del seguente problema:
"Quante sono le applicazioni di un n - insieme A in un k - insieme B ?"

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti che formano i due insiemi, ma solo da n e da k : indichiamolo con $F_{n,k}$.

TEOREMA 12. *Le applicazioni di un n - insieme A in un k - insieme B sono k^n .*

DIM. Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ e $n = 1$, la tesi è immediata. Supponiamola vera per $n - 1$ e proviamola per n . Fissiamo un $a \in A$. Le applicazioni di $A - \{a\}$ in B sono, per l'ipotesi induttiva, k^{n-1} . L'immagine dell'elemento a può ora essere scelta in k modi; dunque, per ogni applicazione di $A - \{a\}$ in B , ci sono k applicazioni di tutto A in B . In conclusione, le applicazioni cercate sono $k \cdot k^{n-1} = k^n$. ■

DEFINIZIONE. Ad ogni applicazione di $E(n)$ in un k - insieme B si dà il nome di *disposizione con ripetizione di classe n dei k oggetti di B* ; al plurale si parla di *disposizioni con ripetizione di k oggetti a n a n* .

Siccome il risultato del Teorema precedente non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k , possiamo ri enunciare così:

TEOREMA 12'. *Le disposizioni con ripetizione di k oggetti a n a n sono k^n .* ■

Con riferimento all'Esempio di partenza, si conclude che le possibili colonne della schedina del totocalcio sono $F_{13,3} = 3^{13} = 1\,594\,323$.

ESEMPLI. 2) In quanti modi si possono colorare 8 caselle allineate, disponendo di 3 colori, se si chiede di usare un solo colore per casella e in modo che ognuno di essi venga utilizzato almeno una volta?

Per assegnare una colorazione, bisogna associare uno dei 3 colori a ciascuna delle 8 caselle; ciò equivale a definire un'applicazione dell'insieme A delle caselle nell'insieme B dei colori. Se non ci fossero limitazioni, il numero delle colorazioni possibili sarebbe perciò $3^8 = 6561$. In realtà, noi vogliamo contare le colorazioni in cui si utilizzano *tutti* i colori disponibili; vogliamo cioè contare le applicazioni *suriettive* di A su B . Il modo più comodo per farlo è quello di contare le colorazioni in cui c'è almeno un colore che non viene usato e poi sottrarre il numero così trovato da 3^8 . Potendosi scegliere in 3 modi il colore da escludere, il numero delle colorazioni non buone sembrerebbe essere dato da 3×2^8 . In realtà, ogni colorazione monocromatica viene così contata 2 volte. Per esempio, se è $B = \{x, y, z\}$, la colorazione fatta col solo colore x è contata sia fra quelle che escludono il colore y che fra quelle che escludono il colore z . Le colorazioni che non utilizzano tutti i colori sono perciò $3 \times 2^8 - 3$. Il numero cercato è dunque

$$3^8 - 3 \times 2^8 + 3 = 5796.$$

3) In quanti modi si possono colorare 10 caselle allineate, disponendo di 4 colori, se si chiede di usare un solo colore per casella e che caselle consecutive abbiano colori diversi?

Ci sono 4 modi per colorare la prima casella e 3 modi per ciascuna delle altre 9, dato che non può essere usato il colore adoperato nella casella precedente. Risultato: $4 \times 3^9 = 78\,732$.

4) Si dica quante sono le colonne della schedina del totocalcio nelle quali sono giusti esattamente k pronostici, con k che varia da 0 a 13. Qual è il numero di pronostici che è più facile indovinare se si riempie a caso la schedina?

Le colonne che ci fanno indovinare esattamente k pronostici sono $\binom{13}{k} \times 2^{13-k}$. Il primo fattore ci dice in quanti modi possiamo scegliere le k partite con pronostico esatto; il secondo dà i modi di riempire le caselle sbagliate. Facendo variare k da 0 a 13, si ottengono i seguenti valori: 8 192; 53 248; 159 744; 292 864; 366 080; 329 472; 219 648; 109 824; 41 184; 11 440; 2288; 312; 26; 1. Il numero di pronostici che è più facile indovinare, se si riempie a caso la schedina, è dunque 4.

Risolviamo, in fine, il problema dell'Esempio 9 del § 1.

La situazione può essere schematizzata così: ci sono 20 unità da *distribuire* fra le 5 scatole S_k . Immaginiamo le nostre unità allineate e rappresentate, per esempio, da 20 astine messe in

fila: $||| \dots ||$. Per assegnare una delle possibili distribuzioni, bisogna decidere dove *finiscono* le unità da attribuire a S_1 e *cominciano* quelle di S_2 ; dove finiscono quelle di S_2 e cominciano quelle di S_3 , e così via. Per indicare questi *punti di separazione*, inseriamo, fra i 20 segni $|$, $5 - 1 = 4$ segni di un tipo diverso, per esempio dei segni $*$. Per esprimere il fatto che S_1 è vuota [S_5 è vuota], porremo un segno $*$ davanti [dietro] a tutti i segni $|$; per esprimere il fatto che S_k è vuota, con $1 < k < 5$, sistemeremo il k -imo segno $*$ subito dopo il $(k - 1)$ -imo. A partire da una distribuzione delle 20 unità si è così ottenuta in modo naturale una *stringa* o *sequenza* di $20 + 4$ segni, di cui 20 del tipo $|$ e 4 del tipo $*$. Viceversa, ogni stringa di questo tipo individua una e una sola delle distribuzioni cercate. Ora, contare queste stringhe è facile. Esse sono in numero di $\binom{20 + 4}{4} = 10\,626$.

§ 7. ESERCIZI

1) In quanti modi si possono estrarre 5 carte da un mazzo di 40, se si chiede di avere almeno due assi, esattamente un 7 e nessuna figura? [R. 4 884]

2) In un'urna ci sono 18 palline, di cui 10 bianche, 5 rosse e 3 nere. In quanti modi se ne possono estrarre 5 se si vuole che compaiano almeno 1 pallina nera ed esattamente una pallina rossa? [R. 2 525]

3) Quanti sono i numeri di 4 cifre, da 0000 a 9999 che hanno la prima o l'ultima cifra uguale a 5? [R. 1 900]

4) In quanti modi si possono estrarre 4 carte da un mazzo di 40, se si chiede di avere due Re e almeno 1 Asso? [R. 804]

5) In un'urna ci sono 10 palline bianche, 6 rosse e 4 nere e se ne estraggono contemporaneamente 5.

a) Quante sono le possibili estrazioni? [R. 15 504]

b) Quante sono le estrazioni in cui figurano palline di tutti i colori? [R. 9 140]

6) Quanti sono i numeri di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, in cui una cifra si ripete 3 volte e un'altra si ripete 2 volte? [R. 43 200]

7) Quanti sono i numeri di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, che hanno almeno uno 0 nei primi tre posti e nemmeno uno 0 negli ultimi tre? [R. 197 559]

8) Fra i numeri di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, quanti ce ne sono con esattamente due cifre uguali e collocate in posti consecutivi? [R. 151 200]

9) In quanti modi si possono estrarre 4 carte da un mazzo di 40 se si chiede di avere in mano almeno due figure? [R. 31 603]

10) Quanti sono i numeri di sei cifre effettive, cioè da 100 000 a 999 999, in cui il 7 compare tre volte e lo 0 una volta? [R. 3 200]

11) In un'urna ci sono 20 palline numerate da 0 a 19. In quanti modi se ne possono estrarre contemporaneamente 5 se si vuole che:

la somma dei numeri estratti sia pari? [R. 7 752]

la somma dei numeri estratti sia maggiore o uguale a 11? [R. 15 503]

12) Quanti sono i numeri di 4 cifre distinte (da 0000 a 9999) con la prima cifra pari e l'ultima dispari? [R. 1 400]

13) Indichiamo i primi dodici numeri naturali con i simboli 0, 1, 2, ..., 9, A, B e scriviamo i numeri naturali in base *dodici*. Fra i numeri di 5 cifre (in base *dodici*), da 00000 a BBBB, quanti sono quelli che contengono *esattamente due* cifre 5, *almeno una* cifra 9 e *nessuna* cifra B? [R. 2 710]

14) In quanti modi si possono distribuire 12 palline, numerate da 1 a 12, in tre scatole, contrassegnate dalle tre lettere A, B e C, se si vuole che in ciascuna scatola non ci siano più di 5 palline? [R. 250 866]

15) Un ladro si è impossessato di un tesserino *Bancomat*, il cui codice segreto è formato da cinque cifre. Egli sa che il codice contiene un 7 e un 9 collocati in posti non consecutivi e sa ancora che le altre tre cifre sono diverse da 7 e da 9.

Quanti tentativi al più deve fare il ladro per accedere al conto corrente? [R. 6 144]

16) Fra i numeri interi compresi tra 10 000 e 99 999, quanti sono quelli in cui la cifra 9 compare esattamente due volte e in posti non consecutivi? [R. 4 131]

17) Fra i numeri interi compresi tra 00 000 e 99 999, quanti sono quelli in cui la cifra 9 compare almeno tre volte di seguito? [R. 280]

18) Quante sono le cinquine del gioco del lotto che ci fanno fare *terno* se giochiamo 4 numeri su una ruota? Quante sono quelle che ci fanno fare almeno *ambo*? [R. 14 620; 628 746]

19) Fra i numeri naturali di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, quanti ve ne sono con esattamente 2 cifre uguali? [R. 453 600]

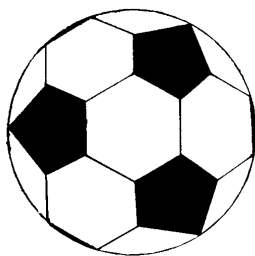
20) Quanti sono i numeri naturali di 6 cifre, da 000 000 a 999 999, che hanno 3 cifre dispari in 3 posti consecutivi e 3 cifre pari non - decrescenti? [R. 17 500]

21) Quante sono le diagonali di un poligono di 7 lati? Qual è il numero massimo di punti, distinti dai vertici del poligono, in cui due *rette diagonali* si incontrano? [R. 14; 49]

22) Si consideri un dodecagono regolare con i vertici numerati da 1 a 12. In quanti modi si possono scegliere 3 dei suoi vertici in modo che il triangolo da essi individuato sia isoscele? E se si chiede che il triangolo sia rettangolo? [R. 52; 60]

23) Fra i numeri di 5 cifre, da 00 000 a 99 999, quanti ve ne sono con le cifre tutte diverse? Quanti con le cifre disposte in ordine crescente? Quanti con le cifre tutte pari? Quanti con 2 cifre pari e 3 dispari? Quanti con 2 cifre pari seguite da 3 cifre dispari [R. 30 240; 252; 3 125; 31 250; 3 125]

24) Quanti sono i numeri di 4 cifre, da 0000 a 9999 per i quali è uguale a 4 la somma delle cifre pari? [R. 1 080]



25) La superficie di un pallone è costituita da 20 esagoni e da un certo numero di pentagoni. Ogni pentagono è circondato da 5 esagoni e ogni esagono è circondato da 3 esagoni e 3 pentagoni (vedi *Figura*). Quanti sono i pentagoni del pallone [R. 12]

26) Si dimostri che la successione definita da $a_n = \binom{2n}{n}$ è crescente.